Temat: Technika zachłanna. Przykłady zastosowania.
Własność wyboru zachłannego i optymalnej podstruktury.

Algorytm zachłanny (ang. *greedy algorithm*) wykonuje zawsze działanie, które wydaje się w danej chwili najkorzystniejsze. Wybiera zatem lokalnie optymalną możliwość w nadziei, że doprowadzi ona do globalnie optymalnego rozwiązania.

1. Przykłady zastosowania techniki zachłannej

a) Problem kasjera

Definicja problemu

WP: Kwota reszty do wydania r ($1 \leq r \leq w$ i $r \in Z$) oraz nominały monet (banknotów) $w_1, w_2, \ldots, w_n$, które mogą być wykorzystane w danym systemie monetarnym do wydania reszty o wartości r. Zakładamy, że ciąg nominałów jest tak określony, że możliwe jest poprawne wydanie reszt r i każdy nominał jest dostępny w dowolnej wielokrotności.

WK: Sposób wydania reszty r taki, że liczba użytych monet jest najmniejsza.

Rozwiązanie oparte na algorytmie zachłannym
Krok1 :
Sortujemy nominały malejąco wg wartości
Krok 2:
Realizujemy proces ustalania nominałów do wydania wartości reszty, używając najpierw monety o największym nominale wartości, redukując w ten sposób problem do wypłacenia mniejszej kwoty.

Przykład 1
Kasjer ma wydać resztę r=0,94$, w=0,99$,
nominały: 0,5$, 0,25$, 0,1$, 0,05$, 0,01$

Aby wydać 0,94$, kasjer wypłaci:
- 0,5$ (zostawiając do zapłacenia 0,44 $),
- 0,25$ (zostaje 0,19 $),
- 0,1$ (zostaje 0,09 $),
- 0,05$ (zostaje 0,04 $) i w końcu
- 4*0,01$

W sumie kasjer wypłaci osiem monet. Jest to minimalna liczba i faktycznie algorytm zachłanny jest optymalny dla monet amerykańskich. Jak jest dla innych systemów monetarnych? (Sprawdź !!!)

Koszt algorytmu zachłannego rozwiązującego problem kasjera:

- koszt sortowania: O($n$log$n$) lub O(n) – gdy można zastosować sortowanie przez zliczanie,
- koszt wyboru monet: O(n),
- koszt całkowity: O($n$log$n$) lub O(n) – w zależności od użytej metody sortowania.

b) Problem wyboru zajęć

WP : Zbiór n przedziałów czasowych $S = \{[s_i, f_i)\}_{i=1..n}$, takich, że $s_i \le f_i$, którym przydzielony jest określony zasób.
(Przykład: Przedziały czasowe to proponowane godziny wykładów, które będą się odbywały w tej samej sali, która jest zasobem przydzielonym do wykładów.)

WK: Podzbiór zbioru S, który jest możliwie największy i zawiera przedziały parami zgodne.
(Przykład**:** Wybór możliwie największej liczby wykładów, które nie powodują kolizji czasowej).

Przedziały $[s_i, f_i)$ i $[s_j, f_j)$ są zgodne gdy $s_i \geq f_j$ lub $s_j \geq f_i$.

Rozwiązanie oparte na algorytmie zachłannym

Krok I:

Sortujemy przedziały niemalejąco po końcach f_i

$$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$$

Krok II:

Do podzbioru wynikowego dodajemy przedział o możliwie najmniejszej wartości f_i zgodny z przedziałem dodanym do podzbioru w poprzednim kroku.

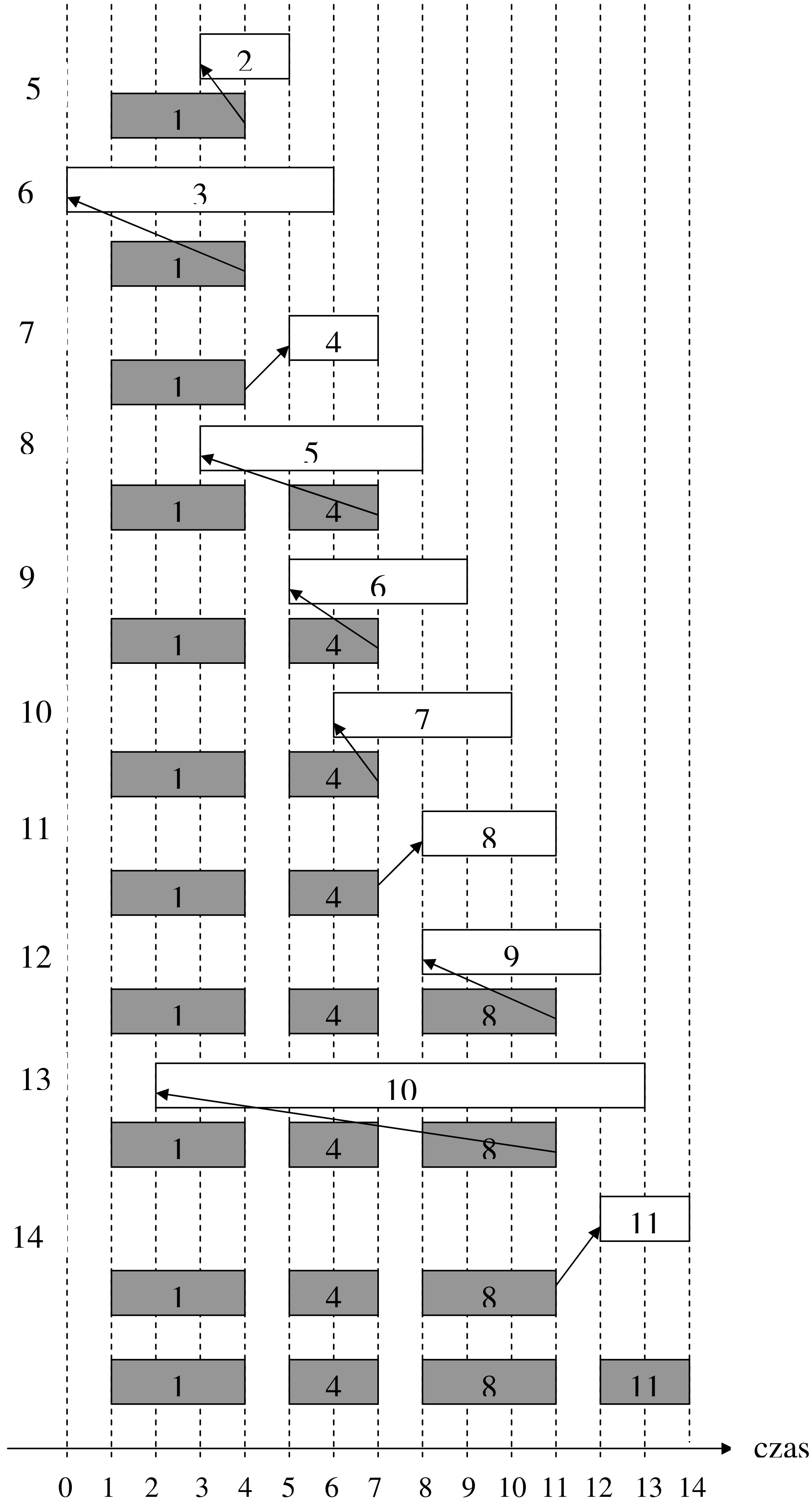
```
WYBOR_ZAJEC(s, f);  // s, f – tablice przedziałów czasowych rozpoczęcia
                    // posortowane niemalejąco wg f
{
   A={1}; j=1;              // A – podzbiór indeksów wybranych przedziałów)
  for (i=2; i<=n; i++)
       if (s[i] >= f[j])
            {
             A=A ∪ {i};
             j=i;
            }
 }
```

Koszt algorytmu zachłannego rozwiązującego problem wyboru zajęć:

- koszt sortowania: O($n$log$n$) lub O(n) – gdy można zastosować sortowanie przez zliczanie,
- koszt wyboru monet: O(n),
- koszt całkowity: O($n$log$n$) lub O(n) – w zależności od użytej metody sortowania.

Przykład 2

nr	s_i	f_i
1	1	4
2	3	5
3	0	6
4	5	7
5	3	8
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	2	13
11	12	14



Powyższy schemat ilustruje działanie procedury WYBOR_ZAJEC na 11- elementowym zbiorze zajęć . Każdy wiersz na rysunku odpowiada jednej iteracji pętli "for". Strzałka w lewo wskazuje zajęcia odrzucone, strzałka w prawo - zajęcia wybrane i dodane do zbioru *A*.

Zajęcia wybierane procedurą WYBOR_ZAJEC mają zawsze najwcześniejszy czas zakończenia wśród wszystkich zajęć. Po wybraniu wszystkich zajęć ze zbioru *A* pozostaje maksymalna ilość nie zajętego czasu.

2. Własność wyboru zachłannego i optymalnej podstruktury

Jak przekonać się czy zastosowanie strategii zachłannej daje optymalne (poprawne) rozwiązanie problemu?

Problemy, dla których może być zastosowana strategia zachłanna spełniają dwie własności:
- własność wyboru zachłannego,
- własność optymalnej podstruktury

a) Własność wyboru zachłannego

Jeżeli wybory "lokalne" są optymalne, to wybór "globalny" (ostateczny) jest optymalny. W algorytmie zachłannym wybory są podejmowane jako najlepsze (z punktu widzenia zadania) w danej chwili. Wybory podejmowane w algorytmie zachłannym nie są zależne od wyborów przeszłych. Można formalnie udowodnić (stosując metodę indukcji), że dany problem ma własność wyboru zachłannego.

W problemie kasjera raz zakwalifikowany do wydania reszty nominał nie jest zmieniamy w następnych krokach algorytmu. Wybór kolejnych nominałów zależy tylko od aktualnej wartości reszty do wydania, a nie od wybranych wcześniej nominałów.

W problemie wyboru zajęć raz wybrany przedział nie jest wymieniany. Kolejny wybierany przedział jest sprawdzany co do zgodności tylko z ostatnio dodanym do rozwiązania.

b) Własność optymalnej podstruktury

Problem ma własność optymalnej podstruktury, jeżeli optymalne rozwiązanie jest funkcją optymalnych rozwiązań podproblemów.

W przypadku problemu kasjera własność optymalnej podstruktury polega na tym, że jeżeli ze zbioru wynikowego nominałów usuniemy nominał najwyższy n_k użyty do wydania reszty, to pozostałe elementy rozwiązania będą tworzyły optymalny wynik dla wartości reszty równej r-l_k*n_k, gdzie l_k oznacza liczbę użytych monet o nominale n_k.
W Przykładzie 1: r = 0,94$, n_k = 0,5$, l_k = 1,
wynik: 1*0,5+1*0,25+1*0,1+1*0,5+4*0,01
r-l_k*n_k = 0,55$,
wynik: 1*0,25+1*0,1+1*0,5+4*0,01 jest optymalny dla wartości reszty równej 0,55$

Własność optymalnej podstruktury polega w przypadku problemu wyboru zajęć na tym, że jeżeli optymalne rozwiązanie A tego problemu rozpoczyna się od zajęć o numerze 1, to $A' = A \setminus \{1\}$ jest optymalnym rozwiązaniem problemu dla zbioru $S' = \{\ i \in S : s_i \geq f_1\}$ czyli dla zbioru wszystkich zajęć, które zaczynają się nie wcześniej niż o czasie f_1.
W Przykładzie 2:
S:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Kolorem różowym został zaznaczony zbiór wynikowy A' , a niebieskim zbiór S'.

3. Dyskretny problem plecakowy

WP: $S = \{s_i\}_{i=1..n}$ - zbiór przedmiotów; i-ty przedmiot ma wartość c_i złotych i waży w_i kilogramów, gdzie c_i i w_i są nieujemnymi liczbami całkowitymi; wartość graniczna W – udźwig plecaka. Każdy z przedmiotów waży nie więcej niż W, a łączna waga wszystkich przedmiotów przekracza W.

WK: Taki podzbiór S' zbioru S, że łączna waga przedmiotów zbioru S' jest nie większa od W, a łączna wartość przedmiotów zbioru S' jest możliwie najwyższa.

Uwaga !!! Nie może dzielić przedmiotów (zabrać do plecaka tylko część wybranego przedmiotu) ani wielokrotność przedmiotu.

Czy dyskretny problem plecakowy może być rozwiązany metodą zachłanną?

- Czy dyskretny problem plecakowy ma własność wyboru zachłannego?

  <u>Przykład 4</u>

  Dane: n=3. Zbiór wybranych przedmiotów składa się z następujących elementów:

  - *Przedmiot* 1 o wadze 10 kg i wartości 60 zł
  - *Przedmiot* 2 o wadze 20 kg i wartości 100 zł
  - *Przedmiot* 3 o wadze 30 kg i wartości 120 zł

Plecak ma maksymalną pojemność 50 kg.

Kryterium wyboru przy zastosowaniu metody zachłannej jest cena jednostkowa, czyli cena 1 kg przedmiotu. Według tego kryterium najwyższą cenę jednostkową ma :

- *Przedmiot* 1 (6 zł/kg), potem
- *Przedmiot* 2 (5 zł/kg), w końcu
- *Przedmiot* 3 (4 zł/kg).

Przedmiot 1 zostałby wybrany jako pierwszy. Następny wybrany byłby *Przedmiot* 2. Do plecaka nie trafiłby *Przedmiot* 3, ponieważ wszystkie trzy przedmioty mają za dużą wagę łączną (60 kg).
Rozwiązanie polegające na wyborze *Przedmiotu* 1 i *Przedmiotu* 2 nie jest optymalne. Rozwiązaniem optymalnym jest natomiast wybór *Przedmiotu* 2 i *Przedmiotu* 3 (łączna waga wynosi 50 kg, łączna wartość 220 zł).

Dyskretny problem plecakowy nie ma własności wyboru zachłannego.

- Czy dyskretny problem plecakowy ma własność optymalnej podstruktury?

Dyskretny problem plecakowy wykazuje cechę optymalnej podstruktury. Rozważmy najwartościowszy ładunek plecaka o masie nie większej niż W. Jeżeli usuniemy z tego ładunku przedmiot j o wadze w_j, to pozostający ładunek jest najwartościowszym zbiorem przedmiotów o wadze nie przekraczającej $W - w_j$, jakie mogą być wybrane z n-1 oryginalnych przedmiotów z wyjątkiem j.

Wniosek: Dyskretny problem plecakowy nie może być rozwiązany w oparciu o strategię zachłanną.

Problemy, które mają własność optymalnej podstruktury, a nie spełniają własności wyboru zachłannego mogą być rozwiązane techniką programowania dynamicznego.

4. Ciągły problem plecakowy

Ciągły problem plecakowy różni się od dyskretnego problemu plecakowego tym, że można zabierać ułamkowe części przedmiotów (Przedmioty trzeba teraz raczej nazywać substancjami).

Ciągły problem plecakowy może być rozwiązany metodą zachłanną?

- Czy dyskretny problem plecakowy ma własność wyboru zachłannego?

  Algorytm
  1) Policzyć cenę jednostkową każdego przedmiotu.
  2) Zabrać największą możliwą ilość najbardziej wartościowej substancji.
  3) Jeśli zapas tej substancji się wyczerpał, a w plecaku wciąż jest jeszcze wolne miejsce, złodziej wybiera następną pod względem ceny jednostkowej substancję i wypełnia nią plecak.
  4) Kroki 2 i 3 są powtarzane do momentu, gdy plecak będzie już pełen.

  Powyższy algorytm wymaga, aby substancje były posortowane według malejącej ceny jednostkowej. Przy tym założeniu wybór określony w algorytmie ma własność wyboru zachłannego.

  Przykład 5

  Dane jak w Przykładzie 4 dla dyskretnego problemu plecakowego. Przypomnijmy:
  - *Przedmiot* 1 (*Substancja* 1) o wadze 10 kg i wartości 60 zł (6 zł/kg)
  - *Przedmiot* 2 (*Substancja* 2) o wadze 20 kg i wartości 100 zł (5 zł/kg)
  - *Przedmiot* 3 (*Substancja* 3) o wadze 30 kg i wartości 120 zł (4 zł/kg)

  Plecak ma maksymalną pojemność 50 kg.

Rozwiązanie:
Złodziej wkłada do plecaka :
10 kg *Substancji* 1 (wartość 60 zł),
20 kg *Substancji* 2 (wartość 100 zł),
20 kg *Substancji* 3 (wartość 80 zł)
Łączna wartość wynosi: 60 zł + 100 zł + 80 zł = 240 zł.

- Czy ciągły problem plecakowy ma własność optymalnej podstruktury?

  Jeżeli usuniemy z optymalnego ładunku w kilogramów pewnej substancji j, to pozostający ładunek powinien być najwartościowszym ładunkiem o wadze co najwyżej W-w, który złodziej może skompletować z n-1 oryginalnych substancji, plus w_j - w kilogramów substancji j.

<u>Koszt czasowy algorytmu zachłannego rozwiązującego ciągły problem placekowy</u>

Sortowanie ciągu substancji według kosztu jednostkowego jest realizowane kosztem optymalnym O($n$log$n$) lub O(n), gdy można zastosować sortowanie przez zliczanie. Wybór przedmiotów wg ma koszt O(n). Zatem koszt łączny wynosi O($n$log$n$) lub O(n), w zależności od użytej metody sortowania.