Temat: Struktury danych do reprezentacji grafów. Wybrane algorytmy grafowe.

Oznaczenia

- $G = \langle V, E \rangle$ - graf bez wag, gdzie *V* - zbiór wierzchołków, *E*- zbiór krawędzi
- $|V| = n$ - liczba wierzchołków grafu *G*
- $|E| = m$ - liczba krawędzi grafu *G*
- (i, j) - krawędź (para uporządkowana) z wierzchołka *i* do wierzchołka *j* w grafie skierowanym
- $\{i, j\}$ - krawędź (podzbiór) łącząca wierzchołki *i* oraz *j* w grafie nieskierowanym
- $G = \langle V, E, f \rangle$ - graf z wagami, gdzie *V* - zbiór wierzchołków, *E*- zbiór krawędzi, f: $V \rightarrow R$

Założenia

- Graf skierowany nie ma pętli, czyli dla każdej krawędzi (i, j) grafu zachodzi $i \neq j$,
- Wierzchołki grafu są reprezentowane numerami: 1, 2, ... , *n*

1. Struktury danych do reprezentacji grafu bez wag

a) macierz sąsiedztwa

Definiujemy tablicę dwuwymiarową *G* o rozmiarach *n*×*n*. Jeżeli graf jest nieskierowany to:

$$G[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{dla } \{i, j\} \notin E \\ 1 & \text{dla } \{i, j\} \in E \end{cases}$$

Przykład

G:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Złożoność pamięciowa: n^2

Macierz sąsiedztwa jest symetryczna względem głównej przekątnej dla grafu nieskierowanego.

- Jeżeli graf jest skierowany to:

$$G[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{dla } (i, j) \notin E \\ 1 & \text{dla } (i,j) \in E \end{cases}$$

Przykład

G:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	0	0

Złożoność pamięciowa: n^2

Wady:

- duża złożoność pamięciowa dla grafów rzadkich (tj. takich dla których $m<<n^2$),
- nieefektywna realizacja algorytmów grafowych wymagających dotarcia do wszystkich węzłów incydentnych z danym węzłem.

Zalety:

- efektywna realizacja (stały koszt) dodawania i usuwania krawędzi grafu,
- efektywna realizacja (stały koszt) sprawdzenia, czy w grafie jest dana krawędź

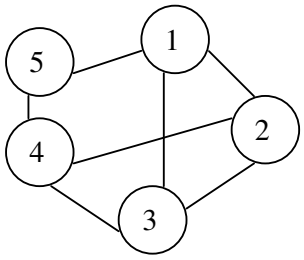
b) Listy incydencji

Strukturą danych jest w tym przypadku jednowymiarowa tablica wskaźników na listy wierzchołków incydentnych. W indeksie *i* takiej tablicy znajduje się adres pierwszego elementu listy zawierającej numery tych wierzchołków grafu, które incydują z wierzchołkiem numer *i.* Rozmiar tablicy jest równy *n*.

Przykład

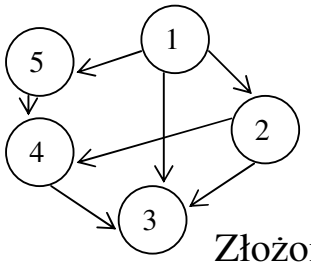
Przykład dla grafu nieskierowanego, T –tablica incydencji

T[1]: 2, 3, 5
T[2]: 1, 3, 4
T[3]: 1, 2, 4
T[4]: 2, 3, 5
T[5]: 4, 1



Przykład grafu skierowanego

T[1]: 2, 3, 5
T[2]: 3, 4
T[3]:
T[4]: 3
T[5]: 4



Złożoność pamięciowa: $n+m$

Wady:

- nieefektywna realizacja dodawania (usuwania) krawędzi grafu (Trzeba sprawdzić całą listę incydencji, aby ustalić, czy krawędzi wstawianej (usuwanej) nie ma już (jest) w grafie.
- nieefektywna realizacja sprawdzenia, czy w grafie jest dana krawędź (Trzeba przejrzeć całą listę incydencji).
- struktura trudniejsza w realizacji

Zalety:

- efektywna złożoność pamięciowa dla skierowanych grafów rzadkich ,
- efektywna realizacja algorytmów grafowych wymagających dotarcia do wszystkich węzłów incydentnych z danym węzłem.

2. Struktury danych do reprezentacji grafu z wagami

a) macierz sąsiedztwa

Definiujemy tablicę dwuwymiarową *G* o rozmiarach *n*×*n*. Jeżeli graf jest skierowanego to:

$$G[i,j]=\begin{cases}\infty & \text{dla } (i,j)\notin E \\ f((i,j)) & \text{dla } (i,j)\in E\end{cases}$$

Wartość ∞ ustalana jest indywidualnie dla konkretnego grafu i konkretnego algorytmu grafowego. Na przykład dla problemu najkrótszych ścieżek $\infty \geq n \cdot f_{\max}$, gdzie $f_{\max}$ to maksimum funkcji wag.

Przykład

G: ∞≥12*5

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	5	3	∞	4
2	3	∞	-6	8	2.5
3	4	12	∞	11	∞
4	0	6	1	∞	1
5	1.3	8	∞	4	∞

Złożoność pamięciowa: n^2

Analogicznie definiujemy macierz sąsiedztwa dla nieskierowanego grafu z wagami.

c) Listy incydencji

Strukturą danych jest w tym przypadku jednowymiarowa tablica wskaźników na listy wierzchołków incydentnych. W indeksie *i* takiej tablicy znajduje się adres pierwszego elementu listy zawierającej numery tych wierzchołków grafu, które incydują z wierzchołkiem numer *i* oraz wagi tych krawędzi. Rozmiar tablicy jest równy *n*.

3. Algorytmy bazowe dla grafów bez wag i ich przykładowe zastosowanie

a) Przeglądania grafu metodą „wszerz" (*breadth-first search* (BFS))

WP: *G* – graf bez wag, *s*- wierzchołek startowy
WK: Odwiedzenie każdego wierzchołka grafu *G*, do którego istnieje co najmniej jedna ścieżka z *s*.

Struktura do reprezentacji grafu *G* - tablica struktur z polami:

- *link* - wskaźnik na listę incydencji,
- *color* – typ z trzema wartościami: *biały*, *szary*, *czarny,*

Wskaźnik listy incydencji zawiera pola:

- *nr* – numer wierzchołka
- *next* – adres kolejnego elementu listy

Struktura pomocnicza – kolejka z operacjami: *in*, *out*, *first*, *empty*.

(*in*(*e*,*Q*)- wstawia do kolejki *Q* element *e*, *out*(*Q*) – usuwa element *e* z kolejki *Q*, *first*(*Q*) – zwraca dane z pierwszego elementu niepustej kolejki *Q*, *empty*(*Q*) – sprawdza, czy kolejka *Q* jest niepusta)

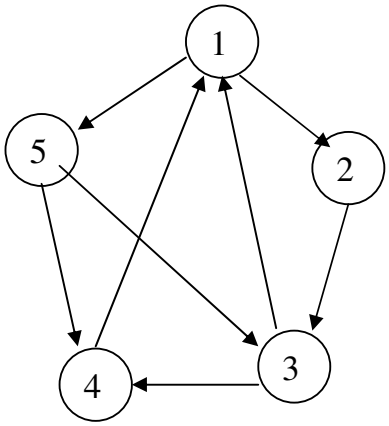
Algorytm

I Krok: Inicjalizacja tablicy grafu

Przykład

G:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*
link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4



II Krok: Przeglądanie grafu z wierzchołka *s*

BFS(*G*, *s*)

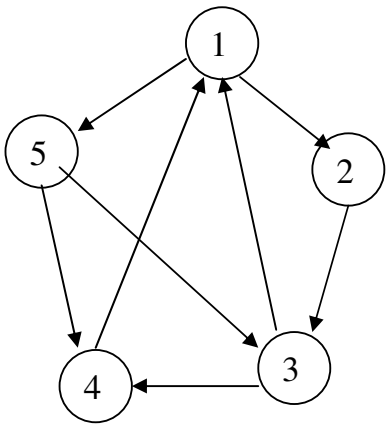
```
G[s].color = szary;
Q=∅;
in(s,Q);
while (!empty(Q))
{
  u= first(Q);
  temp = G[u].link;
  while (temp!=NULL)
    {
      v = temp->nr;
      if (G[v].color == biały)
        {
```

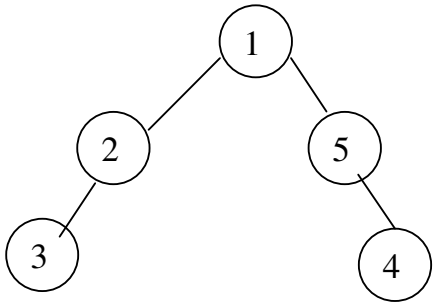
```
            // odwiedzenie wierzchołka v
            G[v].color = szary;
            in(v,Q);
           }
     temp = temp->next;
    }
    out(Q);
    G[u].color = czarny;
  }}
```

Przykład

G:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*
Link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4





b) Zastosowanie przeglądania grafu metodą „wszerz" (*breadth-first search* (BFS)) do ustalania najkrótszych ścieżek w grafie bez wag

WP: *G* – graf bez wag, *s*- wierzchołek startowy
WK: najkrótsze ścieżki z wierzchołka s do pozostałych wierzchołków grafu

Struktura do reprezentacji grafu *G* - tablica struktur z polami:

- *link* - wskaźnik na listę incydencji,
- *color* – typ z trzema wartościami: *biały*, *szary*, *czarny,*
- *d* – odległość od wierzchołka startowego,

- *pi* – poprzednik na ścieżce

Wskaźnik listy incydencji zawiera pola:

- *nr* – numer wierzchołka
- *next* – adres kolejnego elementu listy

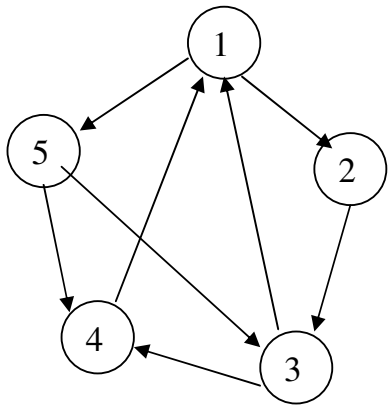
Struktura pomocnicza – kolejka z operacjami: *in*, *out*, *first*, *empty*. (*in*(*e*,*Q*)- wstawia do kolejki *Q* element *e*, *out*(*Q*) – usuwa element *e* z kolejki *Q*, *first*(*Q*) – zwraca dane z pierwszego elementu niepustej kolejki *Q*, *empty*(*Q*) – sprawdza, czy kolejka *Q* jest niepusta)

Algorytm

I Krok: Inicjalizacja tablicy grafu

Przykład *G*:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*
D	∞	∞	∞	∞	∞
pi	-1	-1	-1	-1	-1
link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4

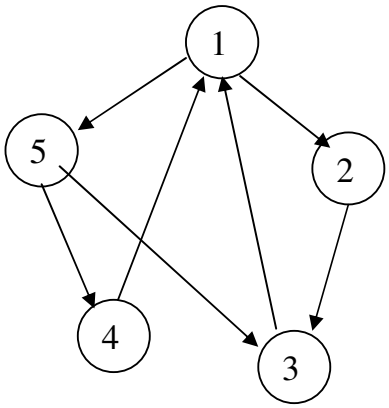


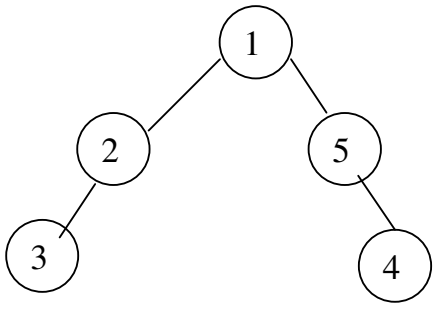
II Krok: Przeglądanie grafu z wierzchołka *s* z jednoczesnym ustawianiem etykiet *d* i *pi*

```
BFS(G, s)
  G[s].color = szary;
  G[s].d = 0;
  Q=∅;
  in(s,Q);
  while (!empty(Q))   {
    u= first(Q);
    temp = G[u].link;
    while (temp!=NULL)   {
        v = temp->nr;
        if (G[v].color == biały)
           {
             G[v].color = szary;
             G[v].d = G[u].d + 1;
             G[v].pi = u;
             in(v,Q);
           }
      temp = temp->next;
    }
    out(Q);
    G[u].color = czarny;
  }
}
```

Przykład G:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*
d	0	1	2	2	2
pi	-1	1	2	5	1
link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4





Złożoność czasowa BFS

Jako operację elementarną przyjmujemy wykonanie operacji *in* lub *out* na kolejce *Q* oraz operację przeglądania list incydencji grafu.
Każdy wierzchołek jest wstawiany co najwyżej raz i co najwyżej raz jest z niej usuwany. Stąd łączny czas wykonania operacji na kolejce wynosi O(*n*). Ponieważ lista incydencji każdego wierzchołka jest przeglądana tylko wtedy, gdy wierzchołek zostanie usunięty z kolejki, lista incydencji każdego wierzchołka jest przeglądana co najwyżej raz. Suma długości wszystkich list wynosi $\Theta(m)$. Łączny czas przeglądania list wynosi zatem O(*m*). Inicjowanie grafu zabiera czas O(*n*).
Reasumując: koszt BFS wynosi O(*m*+*n*).

c)Przeglądania grafu metodą „w głąb" (*depth-first search* (DFS))

WP: *G* – graf bez wag, *s*- wierzchołek startowy
WK: Odwiedzenie każdego wierzchołka grafu *G*, dla którego istnieje co najmniej jedna ścieżka z *s*

Struktura do reprezentacji grafu *G* - tablica struktur z polami:

- *link* - wskaźnik na listę incydencji,
- *color* – typ z trzema wartościami: *biały*, *szary*, *czarny,*

Wskaźnik listy incydencji zawiera pola:

- *nr* – numer wierzchołka
- *next* – adres kolejnego elementu listy

Struktura pomocnicza – stos z operacjami: *push*, *pop*, *top*, *empty*.

(*push*(*e*,*S*)- wstawia do stosu *S* element *e*, *pop*(*S*) – usuwa element *e* ze stosu *S*, *top*(*S*) – zwraca dane z wierzchołka niepustego stosu *S*, *empty*(*S*) – sprawdza, czy stos *S* jest niepusty)

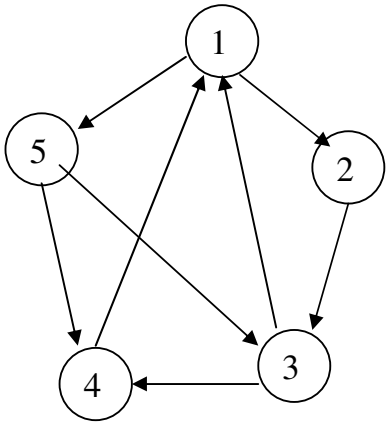
Algorytm

I Krok: Inicjalizacja tablicy grafu

Przykład

G:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*
link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4



II Krok: Przeglądanie grafu z wierzchołka *s*

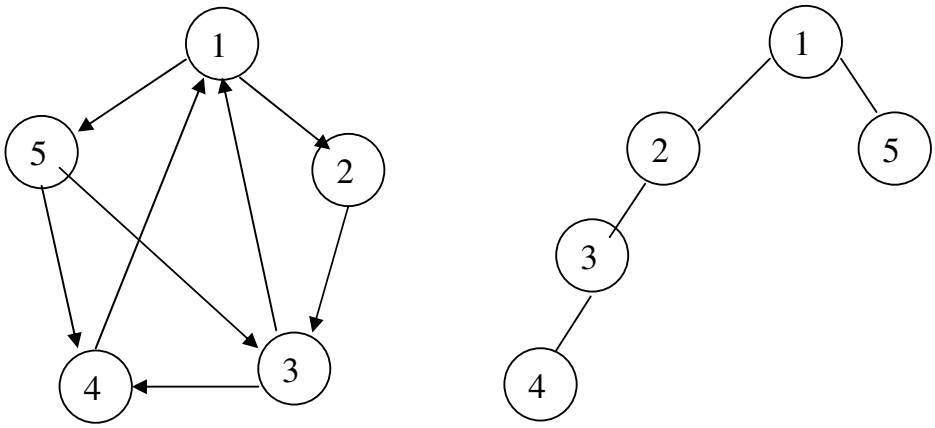
DFS_VISIT(*u*) (funkcja rekurencyjna)

```
G[u].color = szary;
temp=G[u].link;
while (temp!=NULL)
    {
       v=temp->nr;
       if (G[v].color ==biały )
            {
                 // odwiedzenie wierzchołka v
                  DFS_VISIT(v);
             }
        temp = temp->link;
    }
 G[u].color = czarny;
```

DFS (*G*, *s*):
DFS_VISIT(*s*);

Przykład
G:

nr wierzchołka	1	2	3	4	5
color	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*
link	2, 5	3	1, 4	1	3, 4



d) Zastosowanie przeglądania grafu metodą „w głąb" (*depth-first search* (DFS)) do sortowania topologicznego grafu

WP: *G* – graf bez wag, skierowany i acykliczny (bez cykli)

WK: Nowa numeracja wierzchołków taka, że jeżeli graf *G* zawiera krawędź (*u*, *v*), to w tym porządku wierzchołek *u* występuje przed wierzchołkiem *v* (wierzchołek *u* ma mniejszy numer niż wierzchołek *v*). Numery wierzchołków w nowej numeracji zapamiętane są w stosie wynikowym *W*.

Jeżeli graf nie jest acykliczny to takie uporządkowanie nie jest możliwe.

Struktura do reprezentacji grafu *G* - tablica struktur z polami:

- *link* - wskaźnik na listę incydencji,
- *color* – typ z trzema wartościami: *biały*, *szary*, *czarny,*

Wskaźnik listy incydencji zawiera pola:

- *nr* – numer wierzchołka
- *next* – adres kolejnego elementu listy

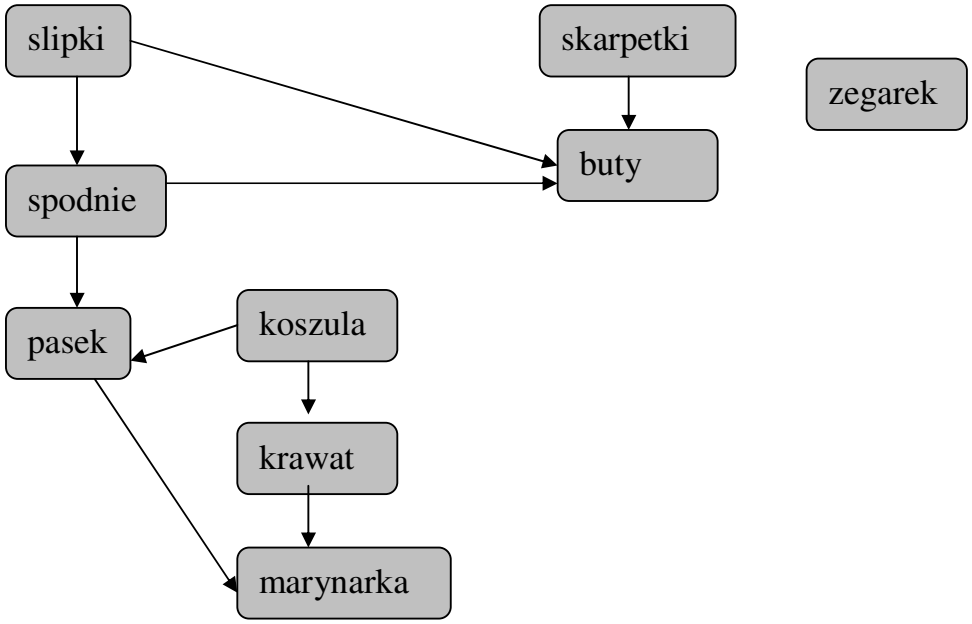
Struktura pomocnicza – stos z operacjami: *push*, *pop*, *top*, *empty*.

(*push*(*e*,*S*)- wstawia do stosu *S* element *e*, *pop*(*S*) – usuwa element *e* ze stosu *S*, *top*(*S*) – zwraca dane z wierzchołka niepustego stosu *S*, *empty*(*S*) – sprawdza, czy stos *S* jest niepusty)

Algorytm

I Krok: Inicjalizacja tablicy grafu

Przykład
Graf *G*:
Krawędź (*u*, *v*) oznacza, że część garderoby *u* powinna być założona przed częścią garderoby *v*.



nr wierzchołka	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dane wierchołka	skar-petki	slipki	spod-nie	Buty	zega-rek	koszu-la	pasek	krawat	mary-narka
color	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*	*biały*
link	4	3, 4	4, 7	-	-	7, 8	9	9	-

II Krok: Przeglądanie grafu metodą „w głąb” z wierzchołka startowego *s*. Wierzchołki, które stają się czarne są wstawiane do stosu wynikowego *W*. Kolejność wierzchołków w stosie W określa nowa numerację wierzchołków grafu po sortowaniu topologicznym.

DFS_VISIT(*u*) (funkcja rekurencyjna)

```
W=∅;
G[u].color = szary;
temp=G[u].link;
while (temp!=NULL)
    {
       v=temp->nr;
       if (G[v].color ==biały )
            {
               DFS_VISIT(v);
            }
        temp = temp->link;
     }
  G[u].color = czarny;
  push(u,W);
}
```

DFS(*G*, *s*);

```
W=∅;
DFS_VISIT(s);
for (i=1;i<=n;i++)
  if (G[i].color==biały) DFS_VISIT(i);
```

Przykład

nr wierzchołka	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dane wierchołka	skar-petki	slipki	spod-nie	buty	zega-rek	koszu-la	pasek	krawat	mary-narka
color	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*	*czarny*
link	4	3, 4	4, 7	-	-	7, 8	9	9	-
nowa numeracja	2	5	6	7	1	3	8	4	9

Złożoność czasowa DFS

Jako operację elementarną przyjmujemy liczbę wywołań rekurencyjnych procedury DFS_VISIT (operacje stosowe realizowane w stosie wywołań) oraz operację przeglądania list incydencji grafu. Koszt procedury DFS wynosi O(m+n) - uzasadnienie analogiczne jak dla BFS.