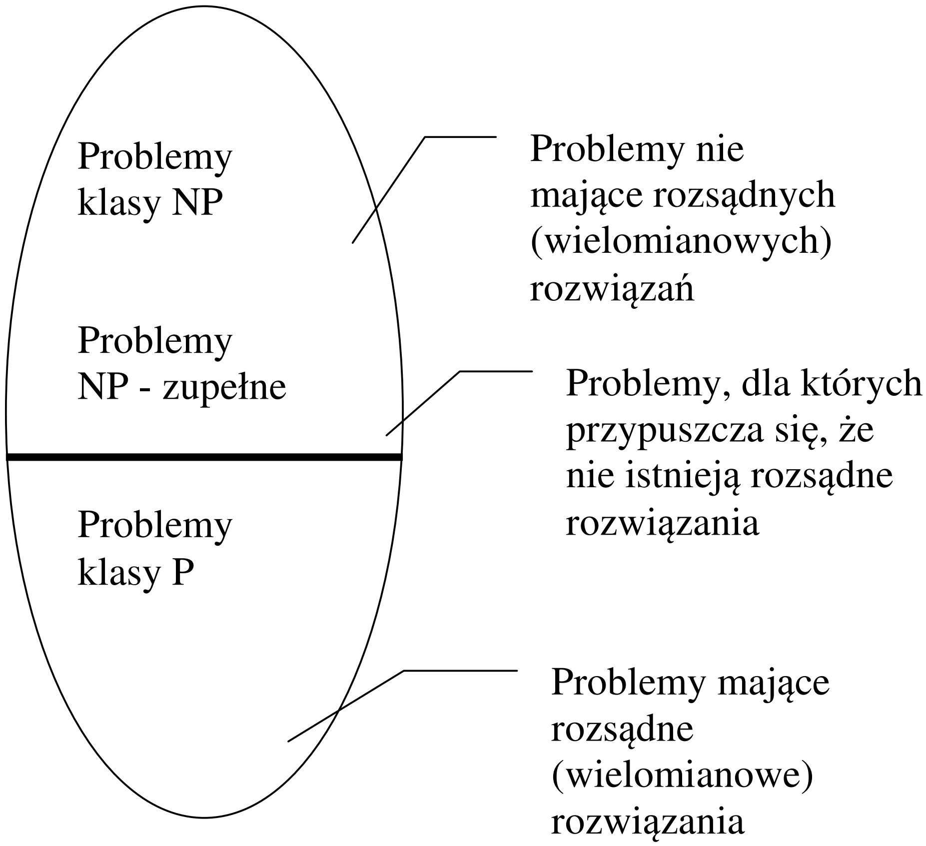
Temat: Problemy trudno rozwiązalne – definicja i przykłady. Klasa NP i NPC.



1. Przykłady problemów klasy NP

Wszystkie przykłady problemów klasy NP przedstawimy w wariancie decyzyjnym, czyli takim, w którym poszukujemy odpowiedzi na pytanie: "Czy istnieje obiekt opisany w zadaniu?”

a) Generowanie cyklu Hamiltona w spójnym grafie

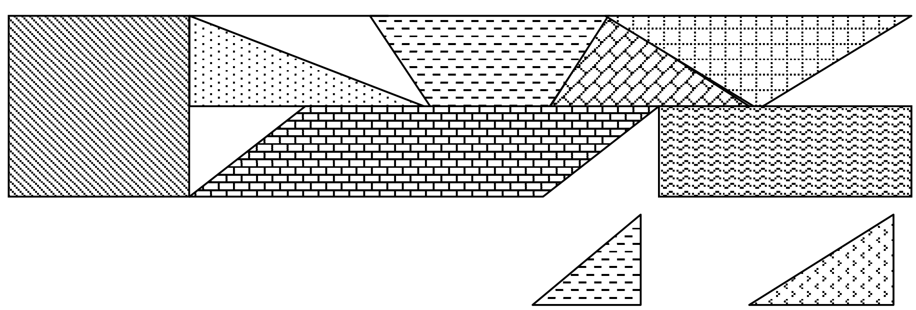
WP: Graf spójny, niezorientowany i *s* - wybrany wierzchołek grafu

WK: Sprawdzenie, czy w grafie istnieje cykl zawierający wszystkie wierzchołki dokładnie raz, zaczynający się w wierzchołku *s*.

b) Problemy ułożeń dwuwymiarowych

WP: *n* wielokątów

WK: Czy z danych wielokątów da się ułożyć prostokąt ?

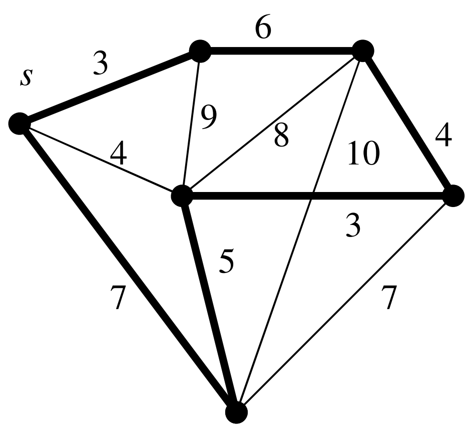


c) Problem komiwojażera

WP: Graf spójny, niezorientowany, z wagami, wierzchołek startowy *s* i liczba *K*.

WK: Czy istnieje w grafie cykl rozpoczynający się w wierzchołku *s*, zawierający wszystkie wierzchołki (co najmniej raz), o całkowitym koszcie nie większym niż *K*.

<u>Przykład 1</u>



Odpowiedź "tak" dla K=30
Zaznaczony cykl jest potwierdzeniem.
Odpowiedź "nie" dla K = 27.

d) Problem ułożenia planu

WP: Podane są określone godziny, w których każdy z n nauczycieli jest do dyspozycji oraz określone godziny zajęć, w których można przeprowadzić każdą z m lekcji. Dodatkowo są podane liczby godzin zajęć, które ma przeprowadzić każdy nauczyciel z każdą klasą.

WK: Należy stwierdzić, czy możliwe jest takie dopasowanie nauczycieli, klas i godzin, aby wszystkie ograniczenia były uwzględnione, tzn. aby żadni dwaj nauczyciele nie uczyli tej samej klasy w tym samym czasie i aby żadne dwie klasy nie miały lekcji z tym samym nauczycielem w tym samym czasie.

e) Ustalanie prawdy logicznej (problem spełnialności)

WP: Zdanie z rachunku zdań, zawierające podstawowe asercje: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ i formuły atomowe

WK: Sprawdzenie, czy istnieje takie wartościowanie formuł atomowych, dla którego formuła jest prawdziwa.

<u>Przykład 2</u>
Dla formuły $\neg(E \Rightarrow F) \wedge (F \vee (D \Rightarrow \neg E))$ takie wartościowanie istnieje i jest określone następująco:
$E = 1,\ D = 0,\ F = 0$

Dla formuły $\neg((D \wedge E) \Rightarrow F) \wedge (F \vee (D \Rightarrow \neg E))$ takie wartościowanie nie istnieje.
Rozmiarem zadania problemu spełnialności jest n liczba asercji w danej formule.

f) Kolorowanie grafu

WP: Graf niezorientowany i spójny oraz liczba barw *c*.

WK: Należy stwierdzić, czy można przyporządkować wszystkim wierzchołkom grafu barwy określone numerami od 1 do *c* tak, aby dwa incydentne wierzchołki nie były etykietowane tym samym kolorem.

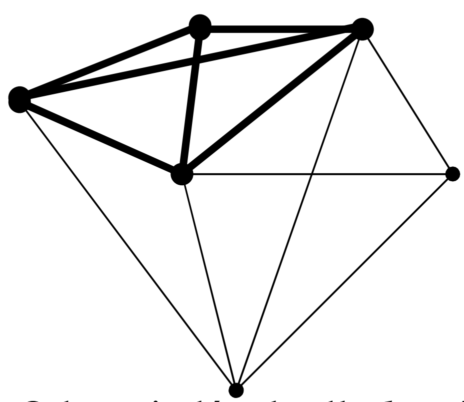
g) Problem kliki

WP: Graf spójny i niezorientowany *G* oraz liczba naturalna *k*.

WK: Czy graf zawiera klikę (podgraf pełny) o rozmiarze *k*.

Graf pełny, to graf, w którym każdy wierzchołek incyduje z wszystkimi pozostałymi.

<u>Przykład 3</u>



Odpowiedź tak, dla $k = 4$. Odpowiedź "nie" dla k=5.

h) Sprawiedliwy podział

WP: Skończony zbiór obiektów S, którym przyporządkowano indeksy od 1 do n.

WK: Czy można dany zbiór obiektów podzielić na dwa rozłączne podzbiory S_1 i S_2 tak, aby miały taką samą wartość całkowitą. Wartość całkowita podzbioru to suma indeksów jego elementów.

Przykład 4
Dla $n = 4$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$
Odpowiedź "tak": $S_1 = \{1, 4\}$ i $S_2 = \{2, 3\}$

Dla $n = 5$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Odpowiedź ?: Sprawdź

i) Szeregowanie zadań niezależnych

WP: Program złożony ze skończonej liczby zadań; liczby naturalne d_t oznaczające czas realizacji tych zadań oraz liczba naturalna d oznaczająca czas wykonania całości zadania. Zakładamy, że zadania mogą być realizowane w dowolnym porządku, ale każde z zadań musi być wykonane w całości na jednym procesorze.

WK: Czy program ten może być zrealizowany w żądanym czasie przy dwóch identycznych procesorów.

Przykład 5

Zadania: a, b, c, d

Czasy realizacji zadań d_t: 1, 2, 3, 4

Czas wykonania całości zadania d: 5

Odpowiedź tak: Procesor nr 1: a, d; Procesor nr 2: b, c

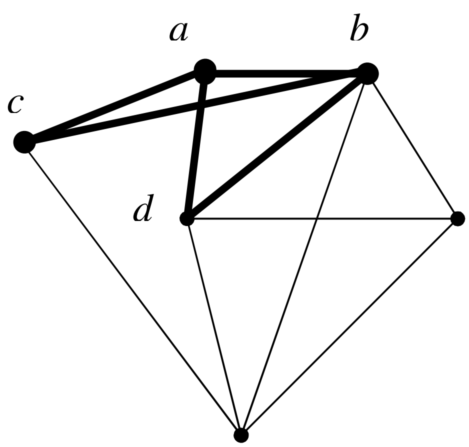
j) Izomorfizm z podgrafem

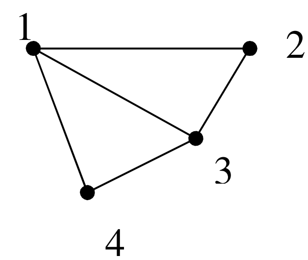
WP: Grafy G i H

WK: Czy graf G zawiera podgraf izomorficzny z H.

Przykład 6

Graf G Graf H





Odpowiedź "tak": Zaznaczony w grafie G podgraf, zawierający wierzchołki a, b, c, d jest izomorficzny z grafem H;

izomorfizm: a – 1, b – 3, c – 4, d - 2

2. Klasa NP - zupełnych

Def. Mówimy, że problem decyzyjny *A* jest przekształcalny w problem decyzyjny *B*, jeśli istnieje przekształcenie $f : A \rightarrow B$ o następujących własnościach:

- odpowiedzi do problemów *A* i *B* są zgodne,
- wartość *f*(*A*) można obliczyć w czasie wielomianowo zależnym od rozmiaru zadania *A*.

<u>Lemat o przekształcalności</u>
Jeżeli problem *A* jest przekształcalny w problem *B* oraz *A* jest problemem klasy NP, to także problem *B* jest problemem klasy NP.

Momentem przełomowym w historii badań nad problemami klasy NP był rok 1971. Stephen Cook pokazał wówczas, że klasa NP zawiera problemy uniwersalne, tzn. takie, iż każdy problem klasy NP jest w nie przekształcalny. Problemy klasy o tej własności nazywamy **NP – zupełnymi**.

<u>Tw. Cooka – Karpa (1971 – 72)</u>
Wszystkie problemy od a) do j) w punkcie 1 są NP- zupełne.

<u>Lemat o przechodniości</u>
Jeżeli problem *A* jest NP – zupełny i jest przekształcalny w problem *B* oraz *B* jest problem klasy NP, to *B* jest NP – zupełny.

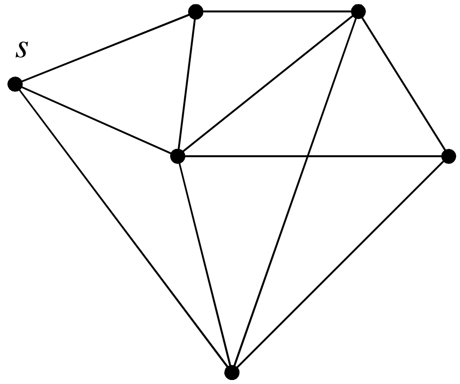
Przykład 7

Zauważmy, że problem cyklu Hamiltona można łatwo przekształcić w problem komiwojażera. W tym celu zastępujemy badany graf G o n wierzchołkach grafem pełnym o tym samym zbiorze wierzchołków. Odległości określamy wzorem:

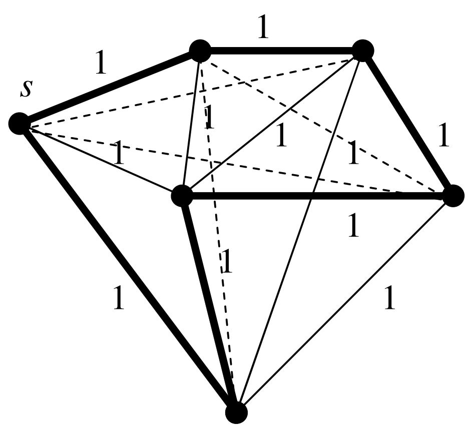
$$d(i, j) = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } i \text{ oraz } j \text{ tworzą krawędź grafu} \\ 2 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Drogą komiwojażera będziemy nazywali odtąd dowolną (tzn. niekoniecznie najkrótszą) drogę zamkniętą przechodzącą dokładnie raz przez wszystkie wierzchołki. Składa się ona z n krawędzi, więc nigdy nie będzie krótsza niż n. Jej długość wyniesie dokładnie n wtedy, gdy komiwojażer będzie się stale poruszał wzdłuż krawędzi grafu G. Innymi słowy, gdy G będzie grafem Hamiltona. Zatem, aby zbadać hamiltonowskość grafu G, wystarczy rozwiązać problem komiwojażera dla macierzy odległości określonej powyższym wzorem i z ograniczeniem K=n.

Przykład 7



Problem cyklu Hamiltona



przekształcony do problemu komiwojażera dla K=6

<u>Przykład 8</u>

Nazwijmy obiekty, o których mowa w problemie sprawiedliwego podziału, zadaniami. Indeks obiektu-zadania przyjmijmy za czas realizacji tegoż zadania. Przyjmijmy za d połowę łącznej wartości wszystkich tych obiektów. Przekształciliśmy w ten sposób problem sprawiedliwego podziału w szeregowanie zadań niezależnych.

3. Hipoteza P≠NP

Każdy problem z klasy NP-zupełnych daje się rozwiązać strategią powrotów. Jednak w najgorszym przypadku potrzebny jest czas wykładniczy, gdy odpowiedź na pytanie zawarte w warunku końcowym problemu wymaga systematycznego zanalizowania wszystkich możliwych rozszerzeń rozwiązania częściowego.

Z drugiej jednak strony, dla wszystkich problemów NP-zupełnych charakterystyczne jest to, że gdybyśmy mieli do dyspozycji wyrocznię, która dla konkretnych danych udzieli nam odpowiedzi "tak" na pytanie zawarte w warunku końcowym problemu i potwierdzi swoją odpowiedź wskazując rozwiązanie, to weryfikacja tego wskazanego rozwiązania może być zrealizowana algorytmem wielomianowym.

Na przykład, gdyby wyrocznia wskazała nam cykl Hamiltona w grafie, to sprawdzenie, czy rzeczywiście jest to cykl Hamiltona może być zrealizowane w czasie O(n). Podobnie, w przypadku problemu spełnialności. Gdybyśmy znali wartościowanie formuł atomowych, przy którym sprawdzana formuła jest prawdziwa, to weryfikację tej prawdziwości też można zrealizować algorytmem wielomianowym.

Wspomniana wyrocznia to **algorytm niedeterministyczny,** który potrafi dokonywać poprawnego wyboru w każdej fazie realizacji strategii powrotów. W trakcie wybierania spośród możliwych rozszerzeń rozwiązania częściowego algorytm niedeterministyczny rozważa tylko ten wariant, który prowadzi do poprawnego rozwiązania całkowitego. Nie nakładamy żadnych warunków na skuteczność działania tego algorytmu w przypadku rozwiązań z odpowiedzią "nie". Algorytm niedeterministyczny może więc czasem nie udzielić odpowiedzi, jednak obecność procedury weryfikacyjnej gwarantuje, że nigdy nie udzieli on odpowiedzi błędnej. Mówimy, że ma on złożoność wielomianową, gdy taką złożoność ma procedura weryfikacji.

Czas na uzasadnienie nazw klas:

- **NP z ang. nondeterministic polynomial - wielomianowy niedeterministycznie**

- **NPC (NP- zupełne) z ang. nondeterministic polynomial complete - wielomianowy niedeterministycznie, zupełny**

- **P z ang. Polynomial** - klasa algorytmów wielomianowych

Hipoteza P≠NP

Następujące warunki są równoważne:

- **Istnieje problem NP- zupełny, który jest trudno rozwiązalny.**

- **Każdy problem NP - zupełny jest trudno rozwiązalny.**

Jeżeli ta hipoteza jest prawdziwa, to nie warto szukać rozsądnych rozwiązań dla problemów NP - zupełnych, bo ich po prostu nie ma.

Hipoteza P=NP

Następujące warunki są równoważne:

- **Istnieje problem NP- zupełny, który jest łatwo rozwiązalny (należy do klasy P).**

- **Każdy problem NP - zupełny może być rozwiązany w czasie wielomianowym.**

Jeżeli ta hipoteza jest prawdziwa, to jeżeli uda się podać rozwiązanie wielomianowe jednego problemu NP- zupełnego, to tym samym rozwiązalne wielomianowo będą pozostałe problemy z tej klasy.